# 摂動項を伴う非線形常微分方程式の準周期解の存在と一意性について(科学技術における数値計算の理論と応用II)



篠原, 能材; 今井, 仁司; 坂口, 秀雄

数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 179-187



# 摂動項を伴う非線形常微分方程式の準周期解の存在と一意性について

Zulfikar ALI(Rajshahi Univ.),
篠原能材(Yoshitane SHINOHARA)(徳島大・工),
今井仁司(Hitoshi IMAI)(徳島大・工),
坂口秀雄(Hideo SAKAGUCHI)(徳島大・工)

## 1. 緒言

本研究は摂動項を伴う非線形常微分方程式 $dz/dt=U(t,z)+\varepsilon F(t,z,\varepsilon)$の準周期解の存在と一意性の定理を確立し．この定理を非線形振動における概周期現象の数理の解明に応用した 特に．非線形振動論において基本的なDuffing type とVan der Pol typeの微分方程式の準周期解の存在と一意性について報告する．

## 2. 存在と一意性の定理およびその応用

概周期系

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=A(t)x$$

に対して，次の不等式(2)を満たすProjection P および正定数 $\sigma_1, \sigma_2$ 並びに非負値関数 $C_1(t,s), C_2(t,s)$ が存在するとき，概周期系 (1)は generalized exponential dichotomy を導くと定義する．

$$(2)\quad \begin{array}{lll} \text{(i)} & \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)} & \text{for } t\geq s, \\ \text{(ii)} & \|\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq C_2(t,s)e^{-\sigma_2(s-t)} & \text{for } t<s, \\ \text{(iii)} & \text{積分 } \int_{-\infty}^{t} C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)}ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t,s)e^{-\sigma_2(s-t)}ds & \text{が有界.} \end{array}$$

ここで $\|f\|=\sup|f(t)|$．

概周期系 (1)が exponential dichotomy を導けば，明らかに generalized exponential dichotomyを導く．

さらに，次の定理 1 がなりたつ．

定理 1. 準周期系

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt}=X(t,z)$$

を考えよう．ここで z および X(t,z) は同じ次元の ベクトル，X(t,s) は t に関して周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ の準周期関数で，z 空間の領域Dでzに関して連続微分可能であるとする．

周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の準周期関数 $z_0(t)$は次の性質を持っているとする.
実軸R上で

$$z_0(t) \in D, \quad \left\| \frac{dz_0(t)}{dt} - X(t, z_0(t)) \right\| \le r \qquad \text{for all } t \in R$$

とする.更に,この $z_0(t)$に対して,次の諸条件(i)~(iv)を満たす正数$\delta$,非負数$\kappa<1$ 及び周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の準周期行列$A(t)$が存在するものとする.

(i) 準周期系(1)は 概周期系として generalized exponential dichotomy を導く.

(ii) $D_\delta \cong \{z; \| z - z_0(t) \| \le \delta \ \text{ for some } t \in R\} \subset D$

(iii) $\| \Psi(t,z) - A(t) \| \le \dfrac{\kappa}{M}$ whenever $z \in D_\delta$,

(iv) $\dfrac{Mr}{1-\kappa} \le \delta$,

ここで $\Psi(t,z)$は$X(t,z)$の$z$に関するJacobi行列で,

$$\int_{-\infty}^{t} C_1(t,s) e^{-\sigma_1(t-s)} ds + \int_{t}^{+\infty} C_2(t,s) e^{-\sigma_2(s-t)} ds \le M$$

このとき,準周期系(3)は周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の準周期解$z=\hat{z}(t)$ を持ち,近似解$z=z_0(t)$に対しては誤差評価

$$(4) \qquad \| z_0(t) - \hat{z}(t) \| \le \frac{Mr}{1-\kappa}$$

が成り立つ.更に,準周期系(3)の周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の準周期解は領域$D_\delta$においては$\hat{z}(t)$だけである.

証明. Japan J. Appl.Math.,3(1986),315-330 を参照してほしい.

定理 2. 摂動項を伴う非線形常微分方程式系

$$(5) \qquad \frac{dz}{dt} = U(t,z) + \varepsilon F(t,z,\varepsilon)$$

を考える.ここで

$$(6) \qquad |\varepsilon| \le \varepsilon_0 \ (\varepsilon_0 > 0)$$

とする. $U(t,z)$および $F(t,z,\varepsilon)$ は同じ次元のﾍﾞｸﾄﾙで,共に,t に関して周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の準周期関数で,かつ,z に関して連続微分可能であるとする.$U(t,z)$の$z$に関するJacobi行列$\Theta(t,z)$はLipshitz条件

$$(7) \qquad \| \Theta(t,z_1) - \Theta(t,z_2) \| \le L \| z_1 - z_2 \| \ (L>0) \quad \text{for all } t \text{ and any } z_1, z_2 \in D$$

を満たすとする.更に,非摂動系

(8) $$\frac{dz}{dt}=U(t,z)$$

の解$z=z_0(t)$は 周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ の準周期関数であり,次の性質を持っているとする.

(9) $z_0(t)\in D$ for all $t\in R$,

(10) $D_0=\{z;\|z-z_0(t)\|<\delta_0$ for some $t\}\subset D$ for some $\delta_0$,

および $A(t)=\Theta[t,z_0(t)]$ の概周期系(1)は generalized exponential dichotomy を導くとする.

このとき,正数 $\varepsilon_1$ ($\leq\varepsilon_0$)が存在して,不等式

(11) $|\varepsilon|<\varepsilon_1$

を満たす任意の$\varepsilon$ に対して摂動系(5)は, 周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ の準周期解$z=\hat{z}(t)$をもち

$$\|\hat{z}(t,\varepsilon)-z_0(t)\|=O(|\varepsilon|)$$

がなりたつ.更に,不等式(11)を満たす任意の $\varepsilon$に対して,周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ の準周期解

$z=\hat{z}(t)$は$z_0(t)$の $\delta$近傍 ($\delta\leq\delta_0$)では唯一つ存在する.

証明. 別の学会誌で報告する.

次に, 2階の非線形振動系

(12) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\mu\frac{dx}{dt}+\nu^2x=a\cos\nu_1t+b\cos\nu_2t+\varepsilon f(t,x,\frac{dx}{dt},\varepsilon)$$

に対して定理2を適用しよう. 但し, $\nu,\nu_1,\nu_2$ はすべて正数. $|\varepsilon|$はパラメータ. $f(t,x,y,\varepsilon)$はtに関して周期 $\omega_1=2\pi/\nu_1,\omega_2=2\pi/\nu_2,\omega_3,\ldots,\omega_m$ の準周期関数で x 及び y に関して連続微分可能であるとする.

方程式(12)を次のベクトル形に書き直す.

(13) $$\frac{dz}{dt}=Az+\varphi(t)+\varepsilon F(t,z,\varepsilon)$$

ここで $z=\binom{x}{y}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\nu^2 & -2\mu\end{pmatrix}$, $\varphi(t)=\begin{pmatrix}0\\ a\cos\nu_1t+b\cos\nu_2t\end{pmatrix}$,

$$F(t,z,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0\\ f(t,x,y,\varepsilon)\end{pmatrix}$$

である.

$z=z_0(t)={}^t(x_0(t),y_0(t))$ を方程式 (13)の非摂動系:

(14) $\dfrac{dz}{dt}=Az+\varphi(t)$

の解とする．この $z=z_0(t)$は $|\varepsilon|$が小さい時の方程式(13)の一つの近似解とみなせる．方程式(13)とその近似解$z=z_0(t)$に対して定理２を適用しよう．

摂動パラメータ $\varepsilon$ は物理的制約から 不等式 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ を満たすものとする．

不等式

(15) $\max(|x-x_0(t)|, |y-y_0(t)|)\leq\delta_0 \quad (\delta_0>0)$

を満たす点$(x,y)$に対して関数 $f(t,x,y,\varepsilon)$は定義されているものとする．

正数$C_0, C$ は次の不等式を満たすものとする．

$|f[t,x_0(t),y_0(t),\varepsilon]|\leq C_0$ for all $t\in R$ and $\varepsilon$ satisfying $|\varepsilon|<\varepsilon_0$

and

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x,y,\varepsilon)\right|+\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,x,y,\varepsilon)\right|\leq C$ for all $(t,x,y)$ satisfying (15)

and $\varepsilon$ satisfying $|\varepsilon|<\varepsilon_0$.

この時，定理２ の条件は，不等式

(16) $|\varepsilon|\leq\min[\varepsilon_0, \dfrac{\delta_0}{M}(C_0+C\delta_0)^{-1}]$

を満たす $\varepsilon$ に対して成り立つことが判る．従って，定理２から，不等式(16)を満たす任意の摂動パラメータ $\varepsilon$ に対して非線形振動 (12) は，tに関して周期 $\omega_1=2\pi/\nu_1$, $\omega_2=2\pi/\nu_2, \omega_3, \ldots\ldots \omega_m$ の準周期解 $x=\hat{x}(t)$ を持つことが判る．しかも，摂動パラメータ $\varepsilon$の限界が不等式 (16) の右辺によって陽的に与えられる事は重要である．

さて，線形微分方程式

$\dfrac{dz}{dt}=Az$

の基本行列 $\Phi(t)=\exp tA$ は $\ell_\infty$-norm を用いて

(17) $\|\Phi(t)\|\leq K_0e^{-\sigma_0 t}$

と評価出来る．また，線形微分方程式(14)のグリーン関数 $G(t,s)$は次のように評価できる．

(18) $\|G\|\leq M$

但し，

$$M=\begin{cases} \dfrac{K_0}{\mu-\sqrt{\mu^2-\nu^2}} & \text{if } \mu>\nu>0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} K_0(t-s)e^{-\mu(t-s)}ds & \text{if } \mu=\nu, \\ \dfrac{K_0}{\mu} & \text{if } 0<\mu<\nu. \end{cases}$$

ここで，$\mu=\nu$ のとき，$K_0$は定数に成らない事は重要である．

さて，非線形振動論において基本的な Duffing type の方程式：

$$(19)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+2\mu\frac{dx}{dt}+\nu^2x=a\cos\nu_1 t+b\cos\nu_2 t+\varepsilon x^3$$

は，方程式(12)において

$$f(t,x,y,\varepsilon)=x^3$$

であり，非摂動系(14)の解 $z=z_0(t)$ の評価

$$|x_0(t)|,\ |y_0(t)|\le K$$

の定数Kを用いて，不等式 (16)の諸定数は

$$\varepsilon_0=\infty,$$

$$\delta_0=K,$$

$$C_0=K^3,$$

$$C=12K^2$$

となる．従って，不等式(16)は

$$(20)\qquad |\varepsilon|\le \min[\varepsilon_0,\ \frac{\delta_0}{M}(C_0+C\delta_0)^{-1}]=\frac{1}{13K^2M}$$

となる．

また，非線形振動論において重要な Van der Pol type の方程式：

$$(21)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+2\mu\frac{dx}{dt}+\nu^2x=a\cos\nu_1 t+b\cos\nu_2 t-2\varepsilon x^2\frac{dx}{dt}$$

は，方程式(12)において

$$f(t,x,y,\varepsilon)=-2x^2y$$

であり，非摂動系(14)の解 $z=z_0(t)$ の評価

$$|x_0(t)|,\ |y_0(t)|\le K$$

の定数Kを用いて，不等式 (16)の諸定数は

$\varepsilon_0=\infty$,

$\delta_0=K$,

$C_0=2K^3$,

$C=24K^2$

となる．従って，不等式(16)は

$$(22)\qquad |\varepsilon| \leq \min[\varepsilon_0,\ \frac{\delta_0}{M}\ (C_0+C\delta_0)^{-1}] = \frac{1}{26K^2M}$$

となる．

以上の計算から，次の２つの定理が得られた．

定理３．Duffing type　の非線形振動(19)の摂動パラメータ $\varepsilon$ が不等式(20)を満たせば，方程式(19)には，周期 $\omega_1$, $\omega_2$ の準周期解 $z=\hat{z}(t)$ が存在して，

$$|\hat{z}(t)-z_0(t)| \leq K \quad \text{for all } t\in R$$

が成り立つ．

定理４．Van der Pol type　の非線形振動(21)の摂動パラメータ $\varepsilon$ が不等式(22)を満たせば，方程式(21)には，周期 $\omega_1$, $\omega_2$ の準周期解 $z=\hat{z}(t)$ が存在して，

$$|\hat{z}(t)-z_0(t)| \leq K \quad \text{for all } t\in R$$

が成り立つ．

## 3．参考文献

次頁の References　を参照した．

References

[1] H.S.Y.Chan,K.W.Chung and Z.Xu, A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators,Int.J.Non-Linear Mechanics,~~Vol.~~31(1996),59-72.

[2] A.M.Fink, Almost periodic differential equations. Lecture Notes in Math.,377,Springer-Verlag,1974.

[3] A.Kohda and Y.Shinohara, On uniform limit of quasiperiodic functions. J.Math.Tokushima Univ.,23(1989),39-40.

[4] A.Kohda and Y.Shinohara, Numerical analysis of the quasiperiodic solutions to Duffing type equations.Japan J.Indust.Appl.Math.10(1993),367-378.

[5] T.Mitsui, Investigation of numerical solutions of some nonlinear quasiperiodic differential equations. Publ.RIMS, Kyoto Univ.,13(1977),793-820.

[6] T.Mitsui and Y.Shinohara,Numerical analysis of ordinary differential equations and its applications.World Scientific ,1995.

[7] F.Nakajima, Existence of quasi-periodic solutions of quasiperiodic systems. Funkcial.Ekvac.,15(1972),61-73.

[8] Y.Shinohara, A geometric method of numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations. Publ.RIMS,Kyoto Univ.,8(1972),13-42.

[9] Y.Shinohara, Numerical analysis of periodic solutions and their periods to autonomous differential systems. J.Math. Tokushima Univ.,11(1977),11-32.

[10] Y.Shinohara, Galerkin method for autonomous differential equations. J.Math.Tokushima Univ.,15(1981),53-85.

[11] Y.Shinohara and N.Yamamoto, Galerkin approximation of periodic solution and its period to Van der Pol equation. J.Math.Tokushima Univ.,12(1978),19-42.

[12] Y.Shinohara,A.Kohda and T.Mitsui, On quasiperiodic solutions to Van der Pol equation. J.Math.Tokushima Univ.,18(1984),1-9

[13] Y.Shinohara,M.Kurihara and A.Kohda, Numerical analysis of quasiperiodic solutions to nonlinear differential equations. Japan J.Appl.Math.,3(1986),315-330.

[14] M.Urabe, Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. Arch.Rational Mech.Anal.,20(1965),120-152.

[15] M.Urabe, Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation. Trudy Pjator Mezdunarodnoi Konferencii po Nelineinyn Kolebanijam, Inst.Mat.Akad.Nauk USSR.,Kiev, Tom 4,1970,21-67.

[16] M.Urabe, Green functions of pseudoperiodic differential operators. Japan-US Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations,Lecture Notes in Math.,243,Springer-Verlag,1971.

[17] M.Urabe, Existence theorem of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems. Funkcial.Ekvac.,15(1972), 75-100.

[18] M.Urabe, On the existence of quasiperiodic solutions to

nonlinear quasiperiodic differential equations. Proc.6th ICNO,Polish Akad.Sci.,Warsaw,1972,Poznan,1-38.

[19] M.Urabe, On a modified Galerkin's procedure for nonlinear quasiperiodic differential systems. Equations Differentielles et Fonctionnelles Non Lineares,Actes de la Conference Internationale <<Equa-Diff 73>>,Hermann,Paris, 1973,223-258.

[20] M.Urabe, On the existence of quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations. Nonlinear Vibration Problems,Zagadnienia Drgan Nieliniowych,Warsaw, 1974,85-93.